DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (1.5 points)

Déterminer l'expression en fonction de n de la suite définie par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad \text{avec} \quad u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 1$$

Exercice 2. (2.5 points)

Considérons la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_{n+1} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} u_n$$

1. Conjecturer (u_n) en fonction de n avec une expression la plus simple possible.
2. Démontrer l'expression obtenue.

Exercice 3. (1.5 points)

Considérons les suites définies par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Que peut on en déduire ?

Exercice 4. (1 point)

Étudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n \cos(\dfrac{1}{n})$ en utilisant les théorèmes du cours.

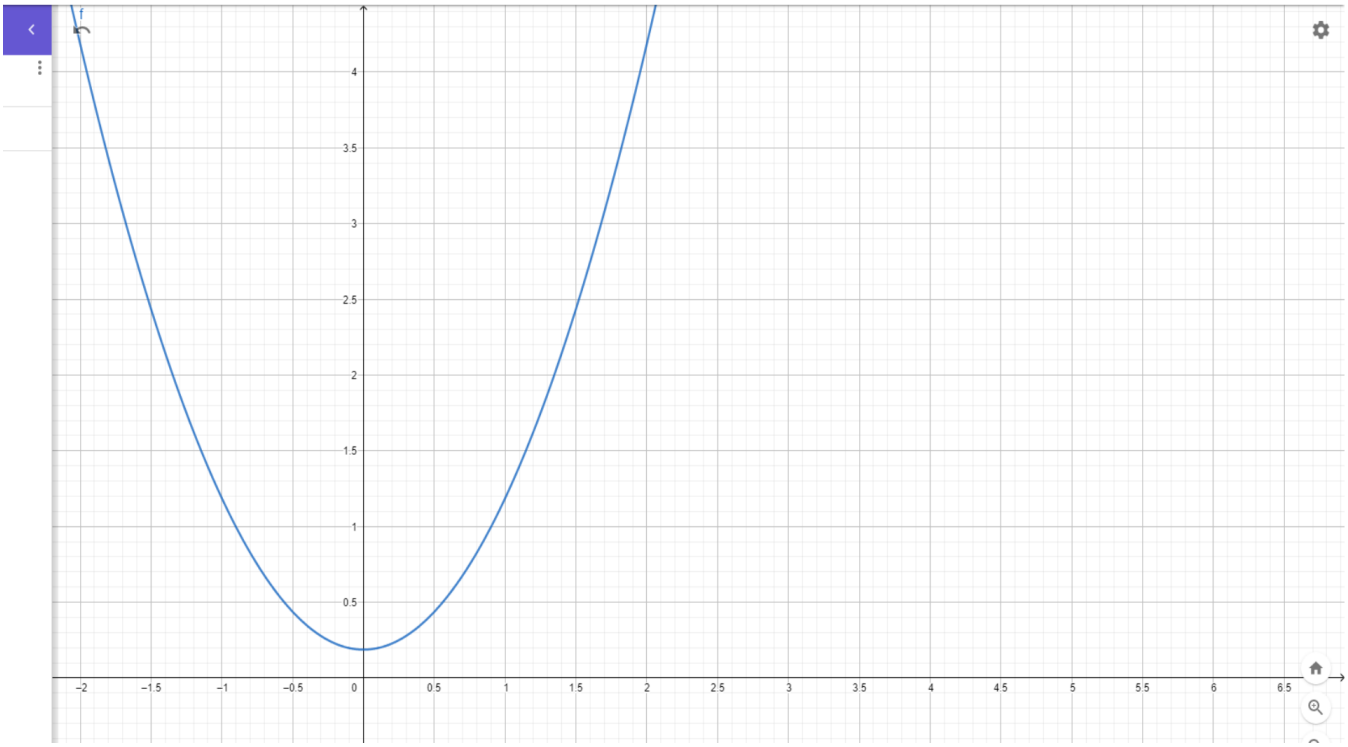
Exercice 5. (2.5 points)

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante $\dfrac{1}{X^3 - X}$.
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k}$.

Exercice 6. (4.5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{16}$. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Dans cette question nous prenons $u_0 = 1$. Construire, à l'aide d'une droite que l'on rajoutera sur le graphique ci-dessous, u_1 et u_2.



   Pour les questions suivantes on citera les théorèmes du cours utilisés dans la justification des réponses.

2. Étudier en fonction de u_0 la monotonie de la suite (u_n). (Plusieurs cas sont à envisager)
3. Étudier en fonction de u_0 la convergence de la suite (u_n). (Plusieurs cas sont à envisager)

Exercice 7. (4.5 points)

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2}{X^2 - 3X + 2}$ dans $\mathbb{R}(X)$
2. $\dfrac{2X + 3}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$
3. $\dfrac{X}{(X + 2)^4(X + 1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$

Exercice 8. (1 point)

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, dont la décomposition en éléments simples est la suivante :

$$F(X) = \frac{3X+2}{X^2+1} + \frac{5}{(X+2)^3}$$

Déterminer les primitives de F sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Exercice 9. (1 point)

Déterminer tous les polynômes de degré 5 tels que $P(2) = P'(2) = P"(2) = 0$ et $P(3) = 0$.