DEVOIR SURVEILLE M2.2 N°2

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (6.5 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Considérons les vecteurs $u(1,0,1)$, $v(0,0,-1)$ et $w(1,1,1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de E, notée $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
3. Compléter $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Interpréter P^{-1} en terme de matrice de passage.
5. Considérons l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) f est elle un automorphisme ?

   (b) Donner l'expression analytique de f.

   (c) Soit $n(1,-1,2)$ dans la base $\mathcal{B}$, donner les coordonnées $f(n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et les coordonnées de n dans la base de $\mathcal{B}'$.

   (d) Donner la formule pour obtenir la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, nous obtenons :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (e) En déduire D^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$. (On donnera l'expression de A^n et on ne fera pas la calcul).

Exercice 2. (1 point)
On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice de p où p est la projection sur Oy parallèlement à la droite d'équation $y = -x$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3. (2.5 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Écrire A sous la forme $A = \alpha I_3 + J$ en précisant α et où J est une matrice nilpotente (à savoir il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $J^k = 0_3$) avec I_3 la matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire A^n.

Exercice 4. (2.5 points)

Résoudre le système suivant les valeurs réelles de a et de b et donner une interprétation géométrique des solutions :

$$(S) \begin{cases} ax + 2y + z = b \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 5. (4.5 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I considéré

1. $(1+x)y' + y = \dfrac{1}{(1+x^2)}$ sur $I =]-1, +\infty[$
2. $y'x^2 - 2xy + y^2 = 0$ sur $I =]0, +\infty[$
3. $(t+1)\dfrac{dh}{dt} = (t^2+2)h\sqrt{h}$ avec $h(0) = H$ sur $I =]-1, +\infty[$

Exercice 6. (3 points)

Soit Γ la courbe paramétrée définie par : avec t un paramètre réel

$$\Gamma \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{3} - t + 1 \\ \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + 2 \end{cases}$$

1. Établir le tableau complet de variations conjoint de x et de y.
2. Étudier la nature des éventuels points stationnaires.
3. Étudier la nature des branches infinies.
4. Représenter l'allure de la courbe en tenant compte des éléments étudiés précédemment.