DEVOIR SURVEILLE M1.1 N°1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**
Barème indicatif.

Exercice 1. (3,5 points)

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ω et R des réels, donner la définition de
$$\lim_{t\to\omega} f(t) = R.$$
2. Dessiner une fonction f satisfaisant la propriété suivante :
$$(P) : \forall y \in [-2,2] \quad \exists x \in \mathbb{R}/y = f(x).$$
3. Donner la négation de (P) et dessiner une fonction satisfaisant la négation de (P).

Exercice 2. (6 points)
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x+3}-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-5x-1}{2x^3+7x^2+x-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|+x+1}{5x+3}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2+2x+3}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^7-3\sin(x)}{x^7-2\cos(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ sans utiliser la règle de l'Hospital.
7.
   (a) Donner la définition d'un prolongement par continuité.
   (b) Soit f la fonction de la variable réelle R définie par $f(R) = \dfrac{R^2\omega - R\omega + 2\omega}{3R^2-5R-2}$ avec ω un réel. Peut on prolonger f par continuité en 2 ?

Exercice 3. (2 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x-5| \leqslant 2 \quad$ ou $\quad |x+2| \geqslant 3$

2. Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant

$$e^{x+y}(|x| + 2|y|) \geqslant 0$$

.

Exercice 4. (1 point)
On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, déterminer $f([-1, 3[)$, en justifiant la réponse.

Exercice 5. (1,5 points)
La fonction suivante est elle dérivable en 0 ?

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x + |x^3|}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 6. (1,5 points)
La fonction suivante est elle de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 ?

$$\begin{cases} f(x) = x^2 cos(\dfrac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 7. (2 points)

Posons

$$fx) = e^{\sqrt{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}}$$

.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f. On ne cherchera pas à donner le domaine de dérivabilité.

Exercice 8. (1,5 points)

Calculer la dérivée n ième de

$$f(x) = x^3 + 2x + 1.$$

Exercice 9. (1 point)

Déterminer la différentielle de f en 3 pour

$$f(x) = e^{2x} - 5x + 1.$$