Exo 1 :

$f(x) = o(g(x))$?

1) a) $\frac{x^2}{e^x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ oui

b) $\frac{x^2}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ oui

c) $\frac{x^2}{e^x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ non

$g(x) = o(f(x))$?

a) $\frac{e^x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ non

b) $\frac{e^x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ non

c) $\frac{e^x}{x^2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ oui

2) $f(x) = \frac{1}{1+x} + e^{x/3} = (1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) + (1 + \frac{x}{3} + \frac{(x/3)^2}{2!} + \frac{(x/3)^3}{3!} + o(x^3))$

$= 2 - \frac{2}{3}x + \left(1 + \frac{1}{18}\right)x^2 - \frac{161}{162}x^3 + o(x^3)$

$= 2 - \frac{2}{3}x + \frac{19}{18}x^2 - \frac{161}{162}x^3 + o(x^3)$

$g(x) = \frac{2}{1-3x^2} = 2(1 + 3x^2 + (3x^2)^2 + o(x^4))$

$= 2(1 + 3x^2 + 9x^4 + o(x^4))$

$= 2 + 6x^2 + 18x^4 + o(x^4)$

Exo 4)

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$\begin{cases} x + 2y = a \\ 3x + 5y = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5a + 2b \\ y = 3a - b \end{cases}$

tout couple (a,b) admet 1 unique antecedant donc f bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

et

$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(a,b) \longmapsto (-5a+2b, 3a-b)$

2) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}$

$f_2(z_1) = f_2(z_2)$

$\Leftrightarrow \overline{z_1} - 3 + i = \overline{z_2} - 3 + i$

$\Leftrightarrow \overline{z_1} = \overline{z_2}$

$\Leftrightarrow z_1 = z_2$

f_2 injective

$\forall z' \in \mathbb{C}$ on cherche $z \in \mathbb{C}$ /

$\overline{z} - 3 + i = z'$

$\Leftrightarrow \overline{z} = z' + 3 - i$

$\Leftrightarrow z = \overline{z'} + 3 + i$

donc f_2 surjective

ainsi f_2 bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et

$f_2^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z' \longmapsto \overline{z'} + 3 + i$

3)

$f_3\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$

$f_3\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1$

donc f_3 n'est pas injective de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

f_3 est surjective de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ en effet

$\forall x \in \mathbb{R}$

on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

ainsi $f_3(M) = x$

f_3 n'est pas bijective

Exo 3 :

notons $A = \{0,1,2,3,4,5\}$

1) $x \in f^{-1}(\{0,1,2,3,4,5\})$

$\Leftrightarrow f(x) \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$ ou $f(x) = 3$ ou $f(x) = 4$ ou $f(x) = 5$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ car $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$, $-1 \notin \mathbb{N}$

$f^{-1}(A) = \{0,1,2\}$

- Soit $x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N}$ / $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$ (impossible car $x_1 \in \mathbb{N}$ et $x_2 \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow x_1 = x_2$

donc f injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

- f n'est pas surjective car l'equation $f(x) = 0$ n'a pas de solution

- f non bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

2) De même

$x \in f^{-1}(\{0,1,2,3,4,5\})$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$ ou $f(x) = 3$ ou $f(x) = 4$ ou $f(x) = 5$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm 1$ ou $x = \pm 2$

$f^{-1}(A) = \{0, \pm 1, \pm 2\} = \{0, -1, 1, -2, 2\}$

- f n'est pas injective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ car $f(1) = f(-1) = 2$

- f n'est pas surjective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ car 0 n'a pas d'antécédant par f.

- f non bijective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$

3) De même

$f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$ ou $f(x) = 3$ ou $f(x) = 4$ ou $f(x) = 5$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = 2$

$f^{-1}(A) = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$

- $f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) = 2x$

f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc réalise une bijection de I dans $f(I)$

$f(I) = [1, +\infty[$.

$f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

$y \longmapsto +\sqrt{y-1}$

Exo 2

1) Soit $x_1 \in E, x_2 \in E$ / $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$

donc f injective

2) Il faudrait rajouter $f \circ g = id_F$

1 bis) $\forall y \in E \quad (g \circ f)(y) = y \Rightarrow \forall y \in E \; \exists z \in F \; z = f(y) / g(z) = y$

g surjective de F dans E

Exo 5 :

1) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

. $Dg = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{x^2+1} \neq 0\} = \mathbb{R}$

. $\forall x \in Dg$, $-x \in Dg$ et $g(-x) = -g(x)$ g impaire donc etude sur $[0, +\infty[$.

. g derivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$g'(x) = \frac{1.\sqrt{x^2+1} - x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

d'où le tableau de g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+1/x^2}} = 1$

$g(\mathbb{R}) =]-1,1[$

$g(\mathbb{R}^+) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+$

2) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in [-1,1]\right\}$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in]-1,1[$

donc $D_f = \mathbb{R}$

3) Arcsin est derivable sur $]-1,1[$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in]-1,1[$

donc f derivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{1/(x^2+1)^{3/2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

$\Rightarrow f(x) = \text{Arctan}\, x + C$

or $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \text{Arctan}\, x$

Exo 6 :

$$\begin{cases} 5x + 9y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (S)$$

$M = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ avec $\det M = 5.4 - 2.9 = 2$

$\det M \neq 0$

donc M inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$S_{(S)} = \{(-5/2, 3/2)\}$

2) A inversible ssi $(2-a)^2 - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow (2-a)^2 - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow (2-a-1)(2-a+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 1$ et $a \neq 3$